



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Andrej Uhliarík

Klouzavé průměry v časových řadách

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Tomáš Cipra, DrSc.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Obecná matematika

Praha 2018

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 12.7.2018

Andrej Uhliarík

Na tomto mieste by som chcel poďakovať vedúcemu práce, prof. RNDr. Tomášovi Ciprovi, DrSc., za vedenie práce, dobré rady, pripomienky a čas ktorý si vždy v prípade potreby našiel. Taktiež by som chcel poďakovať mojej rodine za podporu.

Název práce: Klouzavé průměry v časových řadách

Autor: Andrej Uhliarik

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Tomáš Cipra, DrSc., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Táto práca sa zaoberá analýzou časových radov metódami využívajúcimi klzavé priemery, špeciálne metódou založenou na aproximácii trendovej zložky časového radu polynomiálnymi funkciami. Teoretická časť práce popisuje procedúry, ako nájsť správne váhy, rád a dĺžku klzavého priemeru pre konkrétny časový rad. V praktickej časti demonštrujeme tento postup na reálnych dátach. Súčasťou práce je jednoduchý software na vyhladzovanie časových radov a tabuľky s váhami klzavých priemerov rôznych dĺžok a rádov.

Klíčová slova: časové rady, klzavé priemery, metóda najmenších štvorcov

Title: Moving averages in time series

Author: Andrej Uhliarik

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: prof. RNDr. Tomáš Cipra, DrSc., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: This thesis focuses on time series analysis using methods based on moving averages, especially the method based on the approximation of the trend component of a time series by polynomial functions. In the theoretical part of the thesis, we describe procedures for choosing right weights, degree and length of moving average for a specific time series. In the practical part, we are demonstrating this process on real data. A part of the thesis is a simple software for smoothing time series and tables with weights of moving averages for specific degrees and lengths.

Keywords: time series, moving averages, least squares method

Obsah

Úvod	2
1 Kĺzavé priemery v časových radách	3
1.1 Základné pojmy	3
1.2 Motivácia a konštrukcia kĺzavých priemerov	4
1.3 Vlastnosti	10
1.4 Voľba vhodnej dĺžky vyrovnávaného úseku a rádu kĺzavého priemeru	12
1.4.1 Simulácia	15
2 Softwarový prístup	19
2.1 Stručný popis implementácie	19
2.2 Popis priložených materiálov	19
2.2.1 Popis tabuliek	19
2.2.2 Aplikácia na vyrovnávanie časových radov	20
3 Ukážka na reálnych dátach	21
3.1 Určenie vhodného rádu kĺzavého priemeru	21
3.2 Určenie dĺžky kĺzavého priemeru	22
Záver	24
Zoznam použitej literatúry	25
A Prílohy	26
A.1 Prvá príloha	26
A.2 Druhá príloha	31
A.3 Tretia príloha	36

Úvod

Témou tejto práce je analýza časových radov s využitím klzavých priemerov. Táto metóda vytvorí nový časový rad vyhladených (priemerovaných) hodnôt, ktoré sú vždy vhodne zvoleným váženým priemerom istého úseku analyzovaného časového radu. Zmyslom využitia tejto metódy je, že vhodne zvoleným klzavým priemerom môžeme danú radu očistiť od krátkodobých výkyvov, či už náhodných alebo pravidelných. Takýto postup nám pomáha skúmať dlhodobejší vývoj časového radu a najmä zodpovedať otázku, či a ako veľmi hodnoty časového radu dlhodobo stúpajú alebo klesajú.

Hlavným cieľom tejto práce je popísať fungovanie a následné demonštrovanie jednej z metód, ktorou môžeme vyrovnávať časové rady. Práca nadväzuje na monografiu Cipra (2014), ktorá je hlavným zdrojom tejto práce. Súčasťou práce je aj popis softwareového riešenia na generovanie vhodných váh klzavých priemerov ako aj jeho implementácia.

Práca je rozdelená do troch kapitol. Prvá, najobsiahlejšia, kapitola uvádza základné pojmy, s ktorými sa v práci ďalej stretávame, popisuje matematický náhľad na problematiku časových radov. Popisuje postup hľadania vhodných váh klzavých priemerov na analyzovanie konkrétneho časového radu metódou lokálnej aproximácie časového radu polynómami a uvádza jej matematické odvodenie. Druhá kapitola popisuje, akými softwareovými prostriedkami a postupmi môžeme dané váhy napočítavať a popisuje výpočtové aspekty tejto metódy. Tretia kapitola sa zaoberá demonštrovaním tejto metódy na reálnych dátach.

1. Kľzavé priemery v časových radách

1.1 Základné pojmy

Definícia 1 (Náhodný proces a biely šum)

i) Nech $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ je pravdepodobnostný priestor. Potom množinu $\{Y_t, t \in T \subset \mathbb{R}\}$ náhodných veličín, ktoré sú definované na tom istom pravdepodobnostnom priestore $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ nazveme *náhodný proces*.

ii) Náhodný proces tvorený nekorelovanými náhodnými veličinami, ktoré majú nulovú strednú hodnotu a rovnaký nenulový konečný rozptyl nazveme *biely šum*.

Poznámka

Náhodné procesy možno klasifikovať podľa charakteru indexovej a stavovej množiny.

Ak je indexová množina nanajvýš spočetná, nazveme skúmaný náhodný proces *náhodný proces v diskretnom čase*. Ak je indexová množina podinterval \mathbb{R}_+ , tak daný náhodný proces nazveme *náhodný proces v spojitom čase*.

Ak je stavová množina nanajvýš spočetná, nazveme skúmaný náhodný proces *náhodný proces s diskretnými stavmi*. Ak je stavová množina nedegenerovaný interval v \mathbb{R} , tak hovoríme o *náhodnom procese so spojitými stavmi*. Ak je stavová množina podmnožina \mathbb{R}^m , hovoríme o *m - rozmerom náhodnom procese*.

V praxi pracujeme len s nameranými hodnotami náhodného procesu. Namerané hodnoty nazývame trajektóriou resp. realizáciou náhodného procesu. To znamená, že pozorujeme hodnoty náhodného procesu $\{y_t\}_{t \in T}$ pre nejaké konkrétne $\omega \in \Omega$, teda jedná sa o deterministickú funkciu času $y_t(\omega)$.

Definícia 2 (Vážený kľzavý priemer)

Nech $\{a_t, t \in T\}$ je postupnosť reálnych čísel. Nech d je ľubovoľné prirodzené číslo a

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_d \end{pmatrix}$$

je váhový vektor, teda $w_i \geq 0, \forall i = 1 \dots d$ a $\sum_{i=1}^d w_i = 1$. Nech hodnota \bar{a}_0 je vážený priemer d prvkov z postupnosti $\{a_t, t \in T\}$, vážený váhami \mathbf{w} . Potom postupnosť $\{\bar{a}_j\}_{j=0}^n$ nazveme váženým kľzavým priemerom ak $\bar{a}_j = \sum_{i=1}^d w_i \cdot a_{j+s_i}$ kde $\{s_1, s_2, \dots, s_d\}$ sú indexy prvkov z $\{a_t, t \in T\}$ radené v rovnakom poradí ako vystupujú vo výpočte \bar{a}_0 .

Definícia 3 (Operátor časového posunu a diferenčný operátor)

i) *Operátor časového posunu* B oneskorí veličinu o jednu časovú jednotku:

$$By_t = y_{t-1}.$$

ii) *Diferenčný operátor* Δ vykoná prvú diferenciu:

$$\Delta y_t = y_t - y_{t-1} = (1 - B)y_t.$$

Poznámka

i) *j-tá mocnina časového posunu* B oneskorí veličinu o j časových jednotiek:

$$B^j y_t = B^{j-1}(By_t) = B^{j-1}y_{t-1} = y_{t-j}.$$

ii) *Druhá mocnina diferenčného operátora* Δ^2 vykoná druhú diferenciu:

$$\Delta^2 y_t = \Delta(\Delta y_t) = \Delta(y_t - y_{t-1}) = (y_t - y_{t-1}) - (y_{t-1} - y_{t-2}) = y_t - 2y_{t-1} + y_{t-2} = (1 - B)^2 y_t.$$

iii) *Induktívne, d-tá mocnina diferenčného operátora* Δ^d vykoná d -tú diferenciu:

$$\Delta^d y_t = \Delta^{d-1}(\Delta y_t) = y_t - \binom{d}{1}y_{t-1} + \binom{d}{2}y_{t-2} - \dots + (-1)^d y_{t-d} = (1 - B)^d y_t.$$

1.2 Motivácia a konštrukcia kľzavých priemerov

Mnoho vedných a praktických odvetví využíva a skúma dáta, ktoré sú závislé na čase. Štandardne sa jedná o postupnosť dát y_1, y_2, \dots, y_n chronologicky usporiadanú v čase. Historicky prvotný bol deterministický prístup nahliadať na danú postupnosť ako na súbor čísel, ktorý je časovo usporiadaný. Avšak charakter dát mal často svoju dynamiku (napríklad otrasy merané seizmografom majú pred zemetraseniami isté charakteristické správanie, dalo by sa povedať, že možno v nich vidieť vzorce) a takisto majú tieto dáta často náhodný charakter (napríklad teplota ovzdušia). Práve tento fakt motivoval k sofistikovanejšiemu prístupu analýzy takýchto dát, a to k využívaniu modelov založených na princípoch náhodnosti (teda na teórii pravdepodobnosti) a sú schopné generovať postupnosti podobné (v zmysle náhodnosti) danej časovej rade, ktorú práve analyzujeme. Takéto modely sú práve vyššie definované náhodné procesy.

Jeden z postupov analyzovania časových radov je rozloženie skúmaného časového radu na jednoduchšie časové rady (nazývame aj dekompozícia), ktoré sa pre svoje charakteristické vlastnosti ľahšie skúmajú. Dva základné typy dekompozície sú aditívna, kde predpokladáme, že skúmaný časový rad je súčtom dielčích

časových radov a multiplikatívna, kde predpokladáme, že skúmaný časový rad je súčinom dielčích časových radov.

My si uvedieme jeden z najpoužívanějších typov aditívneho rozkladu, ktorý je uvedený v publikácii Kendall (1976).

Prvú zložku nazývame trendová, resp. dlhodobá (značíme Tr_t). Táto zložka opisuje dlhodobý vývoj radu.

Druhá zložka sa nazýva sezónna (značíme Sz_t), táto zložka opisuje periodické zmeny správania časového radu, spravidla máva dlhšiu periódu, vo väčšine prípadov to je jeden rok.

Tretia zložka sa nazýva cyklická (značíme C_t) a táto zložka opisuje krátkodobjšie pravidelné zmeny správania časového radu. Na pochopenie rozdielu, môže slúžiť príklad, s meraním teplôt v rôzne časti dňa niekoľko rokov. Potom zmeny teplôt spôsobené zmenami ročných období považujeme za sezónnu zložku, zatiaľ čo zmeny teplôt spôsobené striedaním dňa a noci považujeme za cyklickú zložku.

Štvrtú zložku nazývame reziduálna alebo náhodná (značíme E_t). O tejto zložke ako o jedinej predpokladáme, že je postupnosť náhodných veličín závislá na čase, teda, že sa jedná o náhodný proces. Predchádzajúce tri zložky budeme považovať za deterministické funkcie času.

My sa budeme pokúšať z časovej rady vyextrahovať trendovú zložku. Znalosť trendovej zložky je veľmi dôležitá, lebo práve trendová zložka vypovedá najviac o dlhodobom správaní časovej rady. Na očistenie rady od ostatných troch zložiek sú vhodné práve kľzavé priemery, ktoré pri vhodnej voľbe fungujú veľmi efektívne a v praxi sa často využívajú. Často našou hlavnou motiváciou očisťovania časového radu, je eliminácia sezónnej zložky, v takom prípade hovoríme o *sezónnom očisťovaní*. Na tento problém sa dajú s dobrými výsledkami použiť vhodne zvolené kľzavé priemery.

Budeme sa zaoberať konštrukciou kľzavého priemeru metódou vyrovnávania jednotlivých úsekov rady polynomiálnou krivkou, s ktorou sa môžeme stretnúť aj v Chatfield (1975) alebo v Montgomery a kol. (1990). Táto metóda vychádza z faktu, že polynomiálne funkcie sú husté v priestore spojitých funkcií na nejakom uzavretom intervale.

Nech $\{y_t\}_{t=1}^T$ je časový rad. Táto metóda má dva vstupné parametre, s ktorými budeme pracovať a to rád aproximačného polynómu $r > 0$, a počet prvkov radu v jednom vyrovnávanom úseku d (dĺžka kľzavého priemeru). Toto číslo budeme voliť nepárne ($d = 2m + 1$), pretože tento prístup nám poskytne symetrické a výpočtovo ľahšie spočítateľné váhy kľzavého priemeru. Uvažujme, že chceme vyrovnanú hodnotu časového radu v nejakom bode $i \in T$ pevnom, teda hľadáme hodnotu \bar{y}_i , táto hodnota bude vhodne vážený priemer hodnôt $\{y_{i+k}\}_{k=-m}^m$.

Použitá metóda pracuje s aproximačným polynómom

$$G(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_rx^r,$$

ktorý rieši úlohu najmenších štvorcov, teda minimalizuje výraz

$$\sum_{k=-m}^m (G(k) - y_{i+k})^2,$$

kde G je polynóm rádu najvyššie r . Na tento výraz sa môžeme dívať ako na funkciu, ktorá má ako premenné koeficienty polynómu. V bode jej minima nájdeme hľadané hodnoty koeficientov polynómu G . Teda riešili by sme úlohu, ktorá minimalizuje funkciu

$$S(a_0, a_1, \dots, a_r) = \sum_{k=-m}^m (a_0 + a_1k + \dots + a_rk^r - y_{i+k})^2$$

Tento problém vieme reprezentovať aj s použitím lineárnej algebry, kde hľadáme riešenie systému rovníc

$$\begin{pmatrix} 1 & -m & (-m)^2 & (-m)^3 & \dots & (-m)^r \\ 1 & 1-m & (1-m)^2 & (1-m)^3 & \dots & (1-m)^r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & m-1 & (m-1)^2 & (m-1)^3 & \dots & (m-1)^r \\ 1 & m & m^2 & m^3 & \dots & m^r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{i-m} \\ y_{i-m+1} \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_{i+m-1} \\ y_{i+m} \end{pmatrix}.$$

Keďže všeobecne neplatí, že by existovalo riešenie tohto problému (to je prípad, keď $S(a_0, a_1, \dots, a_r) = 0$, čo nemusí existovať), musíme sa teda obmedziť na približné riešenie problému a to také, že budeme minimalizovať eukleidovskú normu chybového vektoru:

$$\hat{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} 1 & -m & (-m)^2 & (-m)^3 & \dots & (-m)^r \\ 1 & 1-m & (1-m)^2 & (1-m)^3 & \dots & (1-m)^r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & m-1 & (m-1)^2 & (m-1)^3 & \dots & (m-1)^r \\ 1 & m & m^2 & m^3 & \dots & m^r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_r \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_{i-m} \\ y_{i-m+1} \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_{i+m-1} \\ y_{i+m} \end{pmatrix}$$

K nájdeniu najlepšieho približného riešenia využijeme nasledujúce tvrdenie.

Tvrdenie 1

Ak je \mathbf{A} matica tvaru $m \times n$ nad \mathbb{R} , a $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, tak množina všetkých približných riešení sústavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ je rovná množine riešení sústavy $\mathbf{A}^T \mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T \mathbf{b}$. Špeciálne, ak $m > n$ a matica \mathbf{A} má hodnotu n , potom existuje práve jedno približné riešenie $\hat{\mathbf{x}}$ minimalizujúce eukleidovskú normu vektora $\mathbf{e}(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax} - \mathbf{b}$ a je jediným riešením sústavy lineárnych rovníc $\mathbf{A}^T \mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T \mathbf{b}$.

Dôkaz. Dokážeme len špeciálny prípad tvrdenia.

Minimalizujeme normu vektora $\mathbf{e}(\mathbf{x})$ tj. funkciu $\|\mathbf{e}(\mathbf{x})\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, kde $\mathbf{e}(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax} - \mathbf{b}$ je zobrazenie z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^m . Pre eukleidovskú normu vektora $\mathbf{e}(\mathbf{x})$ platí,

$$\|\mathbf{e}(\mathbf{x})\| = \sqrt{\mathbf{e}(\mathbf{x})^T \cdot \mathbf{e}(\mathbf{x})} = \sqrt{(\mathbf{Ax} - \mathbf{b})^T \cdot (\mathbf{Ax} - \mathbf{b})}$$

Keďže druhá odmocnina je na množine kladných reálnych čísel spojitá a rýdzo rastúca, stačí nám minimalizovať funkciu pod odmocninou, teda funkciu

$$g(\mathbf{x}) = (\mathbf{Ax} - \mathbf{b})^T \cdot (\mathbf{Ax} - \mathbf{b})$$

Ukážeme, že funkcia $g(\mathbf{x})$ má práve jedno lokálne minimum, ktoré je aj globálne a je rovné riešeniu sústavy lineárnych rovníc $\mathbf{A}^T \mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T \mathbf{b}$.

Nájdeme prvú deriváciu funkcie $g(\mathbf{x})$:

$$g(\mathbf{x})' = ((\mathbf{Ax} - \mathbf{b})^T \cdot (\mathbf{Ax} - \mathbf{b}))' = (\mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{Ax} - \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{b} - \mathbf{b}^T \mathbf{Ax} + \mathbf{b}^T \mathbf{b})' = 2\mathbf{A}^T \mathbf{Ax} - 2\mathbf{A}^T \mathbf{b}$$

To nám dáva:

$$g(\mathbf{x})' = 0 \Leftrightarrow 2\mathbf{A}^T \mathbf{Ax} - 2\mathbf{A}^T \mathbf{b} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{A}^T \mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T \mathbf{b}$$

Teda riešenie sústavy lineárnych rovníc $\mathbf{A}^T \mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T \mathbf{b}$ je jediným stacionárnym bodom funkcie $g(\mathbf{x})$.

Ukážeme, že sa jedná o bod lokálneho minima, pomocou matice druhej derivácie funkcie $g(\mathbf{x})$.

$$g(\mathbf{x})'' = (2\mathbf{A}^T \mathbf{Ax} - 2\mathbf{A}^T \mathbf{b})' = 2\mathbf{A}^T \mathbf{A}$$

Teda dostaneme maticu $\mathbf{B} := 2\mathbf{A}^T \mathbf{A}$. Matica \mathbf{B} je však symetrická a regulárna, teda kvadratická forma $L(\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{y}$ daná maticou \mathbf{B} je pozitívne definitná, lebo $\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ platí:

$$L(\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{y} = (\sqrt{2}\mathbf{y}^T \mathbf{A}^T) \cdot (\sqrt{2}\mathbf{y} \mathbf{A}) = (\sqrt{2}\mathbf{y} \mathbf{A})^T \cdot (\sqrt{2}\mathbf{y} \mathbf{A}) = \mathbf{m}^T \cdot \mathbf{m} \neq 0,$$

kde

$$\mathbf{m} = \sqrt{2}\mathbf{y} \mathbf{A} \neq \mathbf{0}$$

Teda podľa Sylvestrového pravidla platí, že sa jedná o bod lokálneho minima.

Keďže norma je konvexná funkcia, je zrejmé, že sa jedná aj o bod globálneho minima. Toto zistenie dokazuje naše tvrdenie. \square

V našom prípade nech:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -m & (-m)^2 & (-m)^3 & \dots & (-m)^r \\ 1 & 1-m & (1-m)^2 & (1-m)^3 & \dots & (1-m)^r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & m-1 & (m-1)^2 & (m-1)^3 & \dots & (m-1)^r \\ 1 & m & m^2 & m^3 & \dots & m^r \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_r \end{pmatrix}$$

Teda budeme hľadať riešenie sústavy.

$$\begin{pmatrix} \sum_{k=-m}^m 1 \cdot 1 & \sum_{k=-m}^m 1 \cdot k & \sum_{k=-m}^m 1 \cdot k^2 & \dots & \sum_{k=-m}^m 1 \cdot k^r \\ \sum_{k=-m}^m k \cdot 1 & \sum_{k=-m}^m k \cdot k & \sum_{k=-m}^m k \cdot k^2 & \dots & \sum_{k=-m}^m k \cdot k^r \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \sum_{k=-m}^m k^r \cdot 1 & \sum_{k=-m}^m k^r \cdot k & \sum_{k=-m}^m k^r \cdot k^2 & \dots & \sum_{k=-m}^m k^r \cdot k^r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=-m}^m 1 \cdot y_{i+k} \\ \sum_{k=-m}^m k \cdot y_{i+k} \\ \sum_{k=-m}^m k^2 \cdot y_{i+k} \\ \vdots \\ \sum_{k=-m}^m k^{r-1} \cdot y_{i+k} \\ \sum_{k=-m}^m k^r \cdot y_{i+k} \end{pmatrix}$$

Polynóm G prislúchajúci úseku $\{y_{i+k}\}_{k=-m}^m$ označme ako G_i . Hodnotu $G_i(0)$ potom budeme považovať za hľadanú vyrovnanú hodnotu radu \hat{y}_i v strede uvažovaného úseku. Z danej sústavy stačí teda vypočítať len hodnotu a_0 . Hodnota a_0 zodpovedá skalárnemu súčinu vektorov

$$\mathbf{y}_i = \begin{pmatrix} y_{i-m} \\ y_{i-m+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ y_{i+m} \end{pmatrix}$$

a \mathbf{w} čo je vektor váh pre náš kľzavý priemer. Zaujímavé je, že vektor \mathbf{w} je nezávislý na vektore \mathbf{y}_i . Inými slovami, hodnoty váh pre kľzavý priemer konštruovaný touto metódou sú dané len rádom polynómu a počtom prvkov v úseku. Podobnú vlastnosť majú všetky koeficienty tohto polynómu, čiže budeme viesť daný polynóm jednoznačne charakterizovať maticou. To bude rozoberané v kapitole 3. Teda hodnoty kľzavého priemeru našej rady môžeme napočítavať podľa vzorca

$$\hat{y}_i = \mathbf{w}^T \cdot \mathbf{y}_i, \text{ kde } i \in \{m+1, m+2, \dots, T-m\}$$

Tento prístup nám nájde vyrovnané hodnoty $\{\hat{y}_i\}_{i=m+1}^{T-m}$, teda počiatočná a konečná časť nášho vyrovnaného radu musí byť napočítaná iným spôsobom. Na výpočet počiatočnej časti vezmeme prvých $2m+1$ členov z trajektorie vyrovňovaného časového radu. Napočítame koeficienty polynómu $G_{m+1}(x)$ a vyčíslime vyrovnané hodnoty $\{\hat{y}_i\}_{i=1}^m$ podľa vzorca:

$$\hat{y}_i = G_{m+1}(-1-m+i), i \in \{1, 2, \dots, m\}$$

Podobným spôsobom postupujeme pri vyčíslívaní posledných m hodnôt nášho vyrovnaného radu teda vezmeme posledný úsek trajektorie pozorovaného časového radu o dĺžke $2m+1$, napočítame koeficienty pre polynóm $G_{T-m}(x)$ a určíme vyrovnané hodnoty $\{\hat{y}_i\}_{i=T-m+1}^T$ podľa vzorca:

$$\hat{y}_{T-m+i} = G_{T-m}(i), i \in \{1, 2, \dots, m\}$$

1.3 Vlastnosti

V nasledujúcom tvrdení si uvedieme isté základné vlastnosti takto konštruovaných kľzavých priemerov.

Tvrdenie 2 (Vlastnosti vzniknutých kľzavých priemerov)

Nech $2m + 1 \geq r$, kde $2m + 1$ je počet prvkov vo vyrovnávanom úseku a r je rád polynómu, ktorý využívame na vytvorenie kľzavého priemeru. Potom pre náš kľzavý priemer charakterizovaný váhami

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_{-m} \\ \vdots \\ w_0 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix}$$

platí:

i) Súčet váh kľzavého priemeru je rovný 1.

ii) Váhy sú symetrické okolo prostrednej hodnoty w_0 , teda platí:

$$w_i = w_{-i}, \forall i \in \{1, \dots, m\}$$

iii) Ak je r párne číslo, tak kľzavé priemery rádu r a $r + 1$ s rovnakou dĺžkou $2m + 1$ sú totožné.

Dôkaz. i) Uvažujme časovú radu, ktorá nadobúda len hodnotu 1. Pre $r \geq 1$

platí, že polynóm rádu maximálne r minimalizujúci súčet štvorcov odchýliek od našej časovej rady je práve polynóm $p(x) = 1, x \in \mathbb{R}$ (z Tvrdenia 1 vieme, že za daných podmienok minimalizačný polynóm je jednoznačne určený a pre polynóm p platí, že súčet štvorcov kvadratických odchýliek je rovný 0). Navyše vieme, že pre absolútny člen a_0 platí:

$$a_0 = \mathbf{w}^T \cdot \mathbf{1}_{2m+1}$$

Z čoho vyplýva, že súčet váh je rovný 1.

ii) Uvažujme ľubovoľný časový rad $\{y_t\}_{t \in T}$. Hodnotu kľzavého priemeru v čase

$i \in T$ vypočítame ako hodnotu a_0 v sústave rovníc:

$$\begin{pmatrix} \sum_{k=-m}^m 1 \cdot 1 & \sum_{k=-m}^m 1 \cdot k & \sum_{k=-m}^m 1 \cdot k^2 & \dots & \sum_{k=-m}^m 1 \cdot k^r \\ \sum_{k=-m}^m k \cdot 1 & \sum_{k=-m}^m k \cdot k & \sum_{k=-m}^m k \cdot k^2 & \dots & \sum_{k=-m}^m k \cdot k^r \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=-m}^m k^r \cdot 1 & \sum_{k=-m}^m k^r \cdot k & \sum_{k=-m}^m k^r \cdot k^2 & \dots & \sum_{k=-m}^m k^r \cdot k^r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=-m}^m 1 \cdot y_{i+k} \\ \sum_{k=-m}^m k \cdot y_{i+k} \\ \sum_{k=-m}^m k^2 \cdot y_{i+k} \\ \vdots \\ \sum_{k=-m}^m k^{r-1} \cdot y_{i+k} \\ \sum_{k=-m}^m k^r \cdot y_{i+k} \end{pmatrix}$$

Možno si všimnúť, že $\sum_{i=-m}^m k^p = 0$ vždy keď $p \in \mathbb{N}$ je nepárne. Teda matica v sústave vyzerá:

$$\begin{pmatrix} \sum_{k=-m}^m 1 \cdot 1 & 0 & \sum_{k=-m}^m 1 \cdot k^2 & 0 & \dots \\ 0 & \sum_{k=-m}^m k \cdot k & 0 & \sum_{k=-m}^m k \cdot k^3 & \dots \\ \sum_{k=-m}^m k^2 \cdot 1 & 0 & \sum_{k=-m}^m k^2 \cdot k^2 & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}$$

Teda vidíme, že a_0 figuruje len v nepárnych riadkoch (čo znamená, že a_0 je závislá len sústave týchto rovníc). Teda možno ju dostať ako riešenie sústavy:

$$\begin{pmatrix} \sum_{k=-m}^m 1 \cdot 1 & 0 & \sum_{k=-m}^m 1 \cdot k^2 & 0 & \dots \\ \sum_{k=-m}^m k^2 \cdot 1 & 0 & \sum_{k=-m}^m k^2 \cdot k^2 & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=-m}^m 1 \cdot y_{i+k} \\ \sum_{k=-m}^m k^2 \cdot y_{i+k} \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

Keďže $(-k)^{2l} = k^{2l}$, platí že hodnota a_0 bude rovnaká, ak namiesto vektora

$$\begin{pmatrix} \sum_{k=-m}^m 1 \cdot y_{i+k} \\ \sum_{k=-m}^m k^2 \cdot y_{i+k} \\ \vdots \end{pmatrix},$$

dosadíme na pravú stranu sústavy vektor

$$\begin{pmatrix} \sum_{k=-m}^m 1 \cdot y_{i-k} \\ \sum_{k=-m}^m k^2 \cdot y_{i-k} \\ \vdots \end{pmatrix},$$

keďže sa tieto vektory rovnajú.

Inými slovami, hodnota kľzavého priemeru v čase $i \in T$ je rovnaká, ak vyrovňavame úsek $\{y_{i+j}\}_{j=-m}^m$ alebo $\{y_{i-j}\}_{j=-m}^m$. Keďže toto platí pre ľubovoľný časový rad, je zrejmé, že váhy daného kľzavého priemeru sú symetrické okolo prostrednej hodnoty w_0 .

iii) Nech r je párne.

Zo sústavy rovníc 1.2 je vidno, že hodnota a_0 , pre konkrétny vyrovňávaný úsek $\{y_{i+j}\}_{j=-m}^m$ sa dá chápať, ako funkcia hodnôt $\{a_n; n = 2, 4, \dots, r\}$ - párnych koeficientov polynómu G . Ak teda podobnú sústavu rovníc zostavíme pre polynóm rádu $r+1$ zistíme, že a_0 nezávisí na hodnote parametra a_{r+1} . Navyše sústava rovníc, kde pred a_0 nie je 0 je rovnaká ako pri sústave zostavenej pre polynóm rádu r , teda a_0 v tomto prípade tiež možno zapísať ako funciu hodnôt $\{a_n; n = 2, 4, \dots, r\}$, ktorá je navyše zhodná s tou pri polynóme rádu r . Teda váhy kľzavých priemerov r a $r+1$ sú zhodné.

□

1.4 Voľba vhodnej dĺžky vyrovňávaného úseku a rádu kľzavého priemeru

Keď využívame kľzavé priemery tohoto typu pri analyzovaní časových radov, je potrebné vybrať kľzavý priemer z vhodnými parametrami. Kľzavé priemery, ktoré vzniknú popísanou konštrukciou sú jednoznačne určené svojou dĺžkou a rádom polynómu z ktorého pochádzajú. Otázka určenia vhodnej dĺžky kľzavého priemeru je väčšinou riešená expertne, avšak existuje pravidlo, že dĺžka kľzavého priemeru by mala byť zhruba rovnaká ako je dĺžka periódy cyklickej resp. sezónnej zložky kľzavého kľzavého priemeru.

Pre určenie vhodného rádu kľzavého priemeru popíšeme metódu, ktorá predpokladá pre časový rad $\{y_t\}_{t \in T}$ tvar

$$y_t = Tr_t + E_t.$$

Tento model teda neuvažuje pravidelné fluktuácie hodnôt (o tie už časový rad mohol byť očistený inou metódou) a navyše predpokladá, že trendová zložka Tr_t je polynomiálna funkcia (ako už bolo zmienené, tento predpoklad nie je veľmi obmedzujúci) a reziduálna zložka E_t je biely šum.

Naša metóda funguje na myšlienke, že vytvoríme štatistiku, ktorá je závislá len na reziduálnej zložke (teda musíme eliminovať vplyv trendovej zložky). Využijeme k tomu operátor diferencie Δ , ktorý podobne ako operátor derivácie v reálnej analýze zníži rád polynómu o 1 a konštantnú funkciu vynuluje. Môžeme sa o tom presvedčiť.

Nech trend je polynóm stupňa r , teda tvaru

$$Tr_t = \beta_0 + \beta_1 t + \dots + \beta_r t^r.$$

Potom

$$\Delta(\beta_0 + \beta_1 t + \dots + \beta_r t^r) = (\beta_0 + \beta_1 t + \dots + \beta_r t^r) - (\beta_0 + \beta_1 (t-1) + \dots + \beta_r (t-1)^r).$$

Aplikovaním operátora Δ na náhodnú veličinu y_t , k -krát, kde $k \geq r+1$ dostaneme

$$\begin{aligned}\Delta^k y_t &= \Delta^k T r_t + \Delta^k E_t = \Delta^k (\beta_0 + \beta_1 t + \dots + \beta_r t^r) + \Delta^k E_t = 0 + \Delta^k E_t = \\ &= (1 - B)^k E_t = E_t - \binom{k}{1} E_{t-1} + \binom{k}{2} E_{t-2} - \dots + (-1)^k E_{t-k}.\end{aligned}$$

Táto štatistika má nulovú strednú hodnotu, lebo je to lineárna kombinácia centrovaných náhodných veličín. Rozptyl má v tvare

$$\mathbf{Var}(\Delta^k E_t) = (1 + \binom{k}{1}^2 + \binom{k}{2}^2 + \dots + 1) \sigma^2 = \binom{2k}{k} \sigma^2.$$

Využili sme nekorelovanosť náhodných veličín tvoriacích biely šum a fakt, že potom $\forall t_1, t_2 \in T, t_1 \neq t_2$ platí $\mathbf{Var}(E_{t_1} \pm E_{t_2}) = \mathbf{Var}(E_{t_1}) + \mathbf{Var}(E_{t_2})$. S týmito poznatkami a aplikovaním na $\Delta^k y_t$ pre dané k transformáciu $h(x) := \frac{x^2}{\binom{2k}{k}}$, dostaneme náhodnú veličinu

$$V_{k,t} = \frac{(\Delta^k y_t)^2}{\binom{2k}{k}},$$

ktorá má strednú hodnotu σ^2 pre $k \geq r+1$, teda rovnú rozptylu bieleho šumu. Naše kritérium na nájdenie vhodného rádu pracuje s nameranými hodnotami odhadu σ^2 . Odhad, ktorý budeme využívať, je aritmetický priemer týchto náhodných veličín značíme

$$\bar{V}_{k,n} = \frac{\sum_{t=k+1}^n V_{k,t}}{n-k},$$

suma je indexovaná od $k+1$, lebo uvažujeme len hodnoty merané v nezápornom čase ($\forall t \in T$ platí $t \geq 0$). Je zrejmé, že sa jedná o nestraný odhad, ale nakoľko náhodné veličiny $V_{k,t}$, $t \in T$, $t \geq k+1$ netvoria náhodný výber, konzistencia tohoto odhadu zrejme nie je. Za pridaných predpokladov si ukážeme tvrdenie, ktoré jeho konzistenciu dokazuje.

Tvrdenie 3 (Konzistencia odhadu σ^2)

Nech časový rad $\{y_t\}_{t \in T}$ má tvar

$$y_t = T r_t + E_t,$$

kde trend $T r_t = \beta_0 + \beta_1 t + \dots + \beta_r t^r$ je polynóm stupňa r a reziduálna zložka E_t je biely šum tvorený nezávislými náhodnými veličinami s konečným rozptylom $\sigma^2 > 0$. Potom pre ľubovoľné $k \geq r+1$ také, že je splnený predpoklad $\forall i \in 0, \dots, k, \frac{\sum_{t=k+1}^n \mathbf{Var}(E_{t-i}^2)}{(n-k)^2} \rightarrow 0$ pre $n \rightarrow \infty$ platí

$$\bar{V}_{k,n} \xrightarrow{P} \sigma^2, \text{ pre } n \rightarrow \infty.$$

Špeciálne, posledný predpoklad je splnený pre $\{E_t\}_{t \in T}$, nezávislé a rovnako rozdelené s konečným štvrtým momentom.

Dôkaz. Vieme, že

$$\Delta^k y_t = \Delta^k E_t = E_t - \binom{k}{1} E_{t-1} + \binom{k}{2} E_{t-2} - \dots + (-1)^k E_{t-k},$$

potom $(\Delta^k y_t)^2$ vieme zapísať ako

$$\begin{aligned} (\Delta^k y_t)^2 &= \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^k (-1)^{i+j} \binom{k}{i} E_{t-i} \cdot \binom{k}{j} E_{t-j} = \\ &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i}^2 E_{t-i}^2 + 2 \cdot \sum_{i,j \in \{0, \dots, k\}, i > j} (-1)^{i+j} \binom{k}{i} \binom{k}{j} E_{t-i} E_{t-j}. \end{aligned}$$

Odhad rozptylu $\bar{V}_{k,n}$ môžeme teda zapísať ako

$$\begin{aligned} \bar{V}_{k,n} &= \frac{\sum_{t=k+1}^n \sum_{i=0}^k \binom{k}{i}^2 E_{t-i}^2}{\binom{2k}{k}(n-k)} + 2 \cdot \frac{\sum_{t=k+1}^n \sum_{i,j \in \{0, \dots, k\}, i > j} (-1)^{i+j} \binom{k}{i} \binom{k}{j} E_{t-i} E_{t-j}}{\binom{2k}{k}(n-k)} = \\ &= \sum_{i=0}^k \frac{\sum_{t=k+1}^n \binom{k}{i}^2 E_{t-i}^2}{\binom{2k}{k}(n-k)} + 2 \cdot \sum_{i,j \in \{0, \dots, k\}, i > j} \frac{\sum_{t=k+1}^n (-1)^{i+j} \binom{k}{i} \binom{k}{j} E_{t-i} E_{t-j}}{\binom{2k}{k}(n-k)} \end{aligned}$$

Ukážeme, že prvá časť odhadu (označme $\bar{V}'_{k,n}$) konverguje k σ^2 v pravdepodobnosti a druhá časť odhadu (označme $\bar{V}''_{k,n}$) konverguje k nule v pravdepodobnosti.

$\bar{V}'_{k,n} = \sum_{i=0}^k \frac{\sum_{t=k+1}^n \binom{k}{i}^2 E_{t-i}^2}{\binom{2k}{k}(n-k)}$ je konečný súčet priemerov tvaru $\forall i = 0, \dots, k$

$$\frac{\sum_{t=k+1}^n \binom{k}{i}^2 E_{t-i}^2}{\binom{2k}{k}(n-k)}.$$

Vidíme, že každý z týchto priemerov je tvorený náhodnými veličinami so strednou hodnotou $\mathbf{E} \frac{\binom{k}{i}^2 E_{t-i}^2}{\binom{2k}{k}} = \frac{\binom{k}{i}^2 \sigma^2}{\binom{2k}{k}}, \forall t \in T, t \geq k+1$. Vieme, že tieto náhodné veličiny sú navzájom nezávislé a za predpokladu, že $\frac{\sum_{t=k+1}^n \mathbf{Var}(E_{t-i}^2)}{(n-k)^2} \rightarrow 0$, pre $n \rightarrow \infty$ môžeme s využitím slabého zákona veľkých čísel tvrdiť

$$\frac{\sum_{t=k+1}^n \binom{k}{i}^2 E_{t-i}^2}{\binom{2k}{k}(n-k)} \rightarrow \frac{\binom{k}{i}^2 \sigma^2}{\binom{2k}{k}} \text{ pre } n \rightarrow \infty.$$

Teda $\bar{V}'_{k,n} \rightarrow \sigma^2$ pre $n \rightarrow \infty$.

$\bar{V}''_{k,n} = 2 \cdot \sum_{i,j \in \{0, \dots, k\}, i > j} \frac{\sum_{t=k+1}^n \binom{k}{i} \binom{k}{j} E_{t-i} E_{t-j}}{\binom{2k}{k}(n-k)}$ je konečný súčet priemerov tvaru $\forall i, j = 0, \dots, k; i > j$

$$\frac{\sum_{t=k+1}^n \binom{k}{i} \binom{k}{j} E_{t-i} E_{t-j}}{\binom{2k}{k}(n-k)}.$$

Každý z týchto priemerov je tvorený náhodnými veličinami, ktoré majú strednú hodnotu

$$\mathbf{E} \frac{\binom{k}{i} \binom{k}{j} E_{t-i} E_{t-j}}{\binom{2k}{k}} = \frac{\binom{k}{i} \binom{k}{j}}{\binom{2k}{k}} \mathbf{E} E_{t-i} \mathbf{E} E_{t-j} = 0, \forall i, j = 0, \dots, k; i > j.$$

Využili sme vlastnosti bieleho šumu. Teraz musíme ukázať, že náhodné veličiny $Y_{t,i,j} = E_{t-i} E_{t-j}$ sú po dvoch nekorelované. To je ale pravda, lebo pre $t-i \neq t'-i$ a $t-j \neq t'-j$ sú náhodné veličiny $Y_{t,i,j}$ a $Y_{t',i,j}$ nezávislé a v prípadoch, že $t-i = t'-i$ a $t-j \neq t'-j$ alebo $t-i \neq t'-i$ a $t-j = t'-j$ sú nekorelované. Platí to, pretože napríklad pre $t-i \neq t'-i$ a $t-j = t'-j$ máme

$$\mathbf{E} Y_{t,i,j} Y_{t',i,j} = \mathbf{E} E_{t-i} E_{t'-i} E_{t-j}^2 = \mathbf{E} E_{t-i} \mathbf{E} E_{t'-i} \mathbf{E} E_{t-j}^2 = 0.$$

Tu sme už museli využiť predpoklad nezávislosti náhodných veličín E_t . Nakoniec, s využitím nezávislosti ukážeme, že

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{t=k+1}^n \mathbf{Var}(E_{t-i}E_{t-j})}{(n-k)^2} &= \frac{\sum_{t=k+1}^n \mathbf{E}E_{t-i}^2 E_{t-j}^2 - (\mathbf{E}E_{t-i}E_{t-j})^2}{(n-k)^2} = \frac{\sum_{t=k+1}^n \mathbf{E}E_{t-i}^2 \mathbf{E}E_{t-j}^2 - 0}{(n-k)^2} = \\ &= \frac{\sum_{t=k+1}^n \sigma^2 \cdot \sigma^2}{(n-k)^2} = \frac{\sigma^4}{n-k} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

pre $n \rightarrow \infty$. Opäť sme ukázali platnosť predpokladov slabého zákona veľkých čísel, teda môžeme tvrdiť $\bar{V}''_{k,n} \xrightarrow{P} 0$ pre $n \rightarrow \infty$.

Kedže teda $\bar{V}'_{k,n} \xrightarrow{P} \sigma^2, n \rightarrow \infty$ a $\bar{V}''_{k,n} \xrightarrow{P} 0, n \rightarrow \infty$, tak

$$\bar{V}_{k,n} = \bar{V}'_{k,n} + \bar{V}''_{k,n} \xrightarrow{P} \sigma^2, n \rightarrow \infty.$$

□

Poznámka:

V dôkaze sme použili Čebyševov zákon veľkých čísel, ktorý je uvedený v Dupač a Hušková (2013). Čebyševov zákon veľkých čísel hovorí, že postupnosť nekorelovaných náhodných veličín $\{X_n\}$ s konečnými druhými momentami za podmienky, že $\frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{Var}(X_i)}{n^2} \rightarrow 0$ pre $n \rightarrow \infty$ spĺňa slabý zákon veľkých čísel, teda $\bar{X}_n - \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{E}X_i}{n}$ konverguje k 0 v pravdepodobnosti.

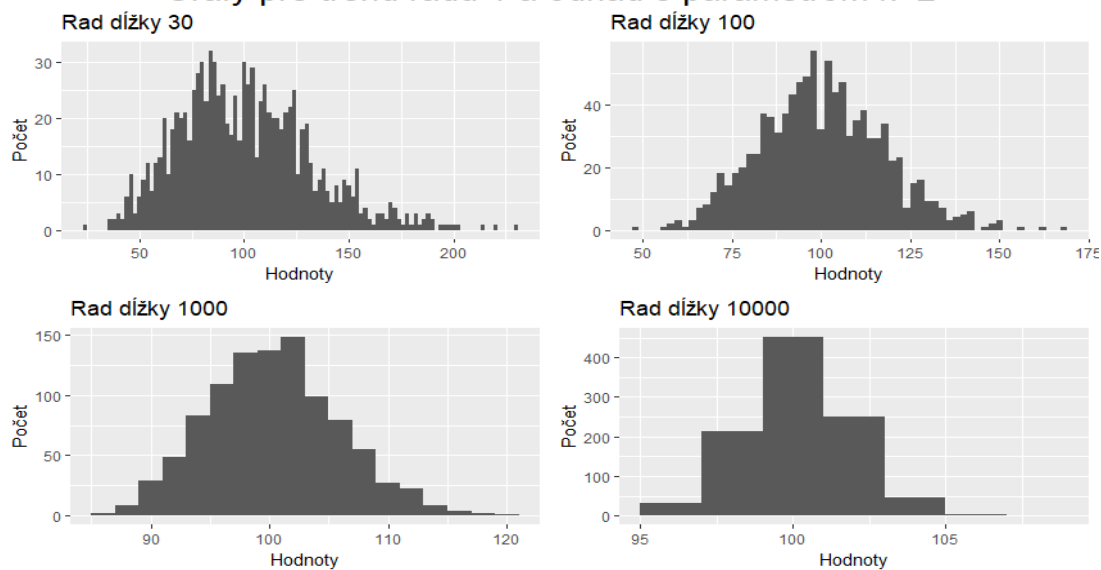
Vďaka tomuto tvrdeniu vieme, že môžeme pre isté voľby k , konkrétne pre $k \geq r+1$ sa hodnoty odhadu $\bar{V}_{k,n}$ začnú stabilizovať v nejakom okolí skutočnej hodnoty σ^2 . Tento fakt využijeme pre určenie vhodného r následovne. Najskôr napočítame hodnoty $\bar{V}_{k,n}$, pre rôzne hodnoty $k = 2, 3, \dots$ až kým začneme pozorovať, že napočítané hodnoty sa začínajú stabilizovať. Pri najmenšom takom k budeme s využitím spomenutých faktov predpokladať rovnosť $k = r+1$, teda rád polynómu vypočítame ako $r = k - 1$. Túto metódu a jej vlastnosti budeme pozorovať v simulácií s dvoma typmi časových rád, pri ktorých predpis trendovej zložky a rozdelenie reziduálnej zložky poznáme.

1.4.1 Simulácia

Budeme pozorovať fungovanie popisovanej metódy na určenie rádu kľzavého priemeru pre rôzne dĺžky časových radov (dĺžky 30, 100, 1000 a 10000), pre dva typy trendu (lineárny a kvadratický) a pre rôzne hodnoty k v odhade rozptylu $V_{k,t}$. Pre lineárny trend budeme pozorovať správanie odhadu pre $k = 2$ a pre $k = 11$. Pre kvadratický trend porovnáme správanie odhadu pre 3 a pre $k = 21$. Pre každú možnosť následne budeme simulovať 1000 pozorovaní trajektórie časového radu, ktoré využijeme na odhad rozptylu a budeme pozorovať vlastnosti odhadu za rôznych podmienok.

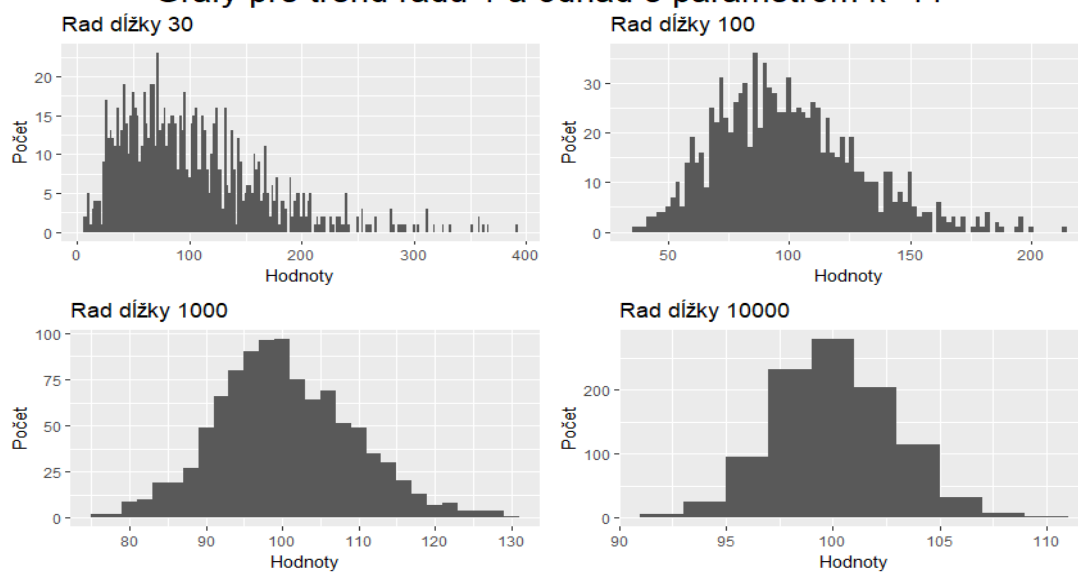
Vychádzame, z predpokladu, že skúmaný rad sa dá rozložiť na $y_t = Tr_t + E_t$, kde Tr_t je polynomiálny trend a E_t je reziduálna zložka. My budeme konštruovať časový rad s reziduálnou zložkou, ktorá je normálny biely šum, teda postupnosť nezávislých normálne rozdelených náhodných veličín s nulovou strednou hodnotou a konštantným nenulovým konečným rozptylom. My budeme vždy uvažovať biely šum s rozptylom $\sigma^2 = 100$.

Grafy pre trend rádu 1 a odhad s parametrom $k=2$



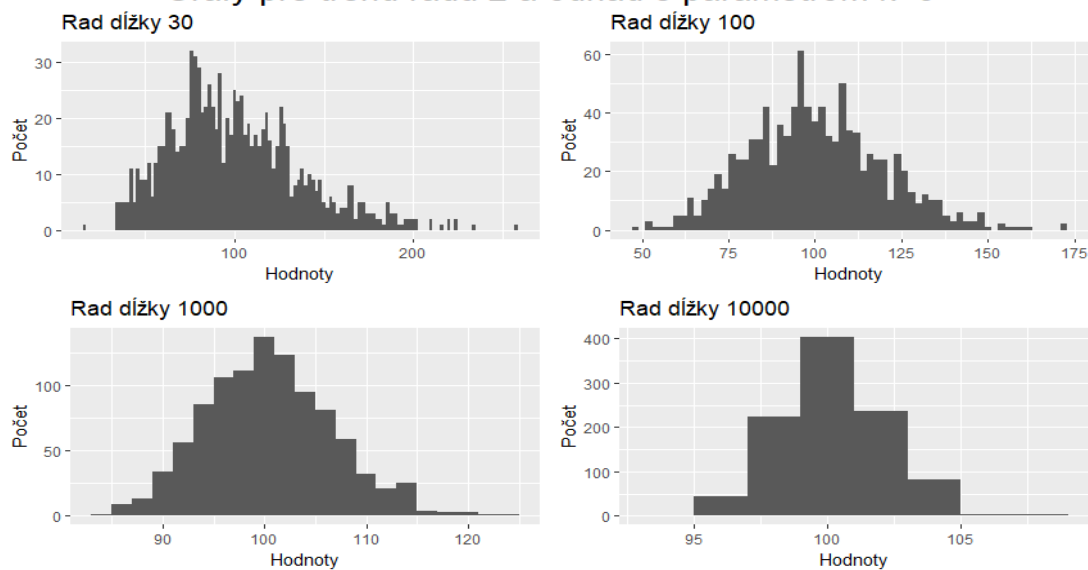
Obr. 1.1: Histogramy nameraných hodnôt pre lineárny trend a $k=2$

Grafy pre trend rádu 1 a odhad s parametrom $k=11$



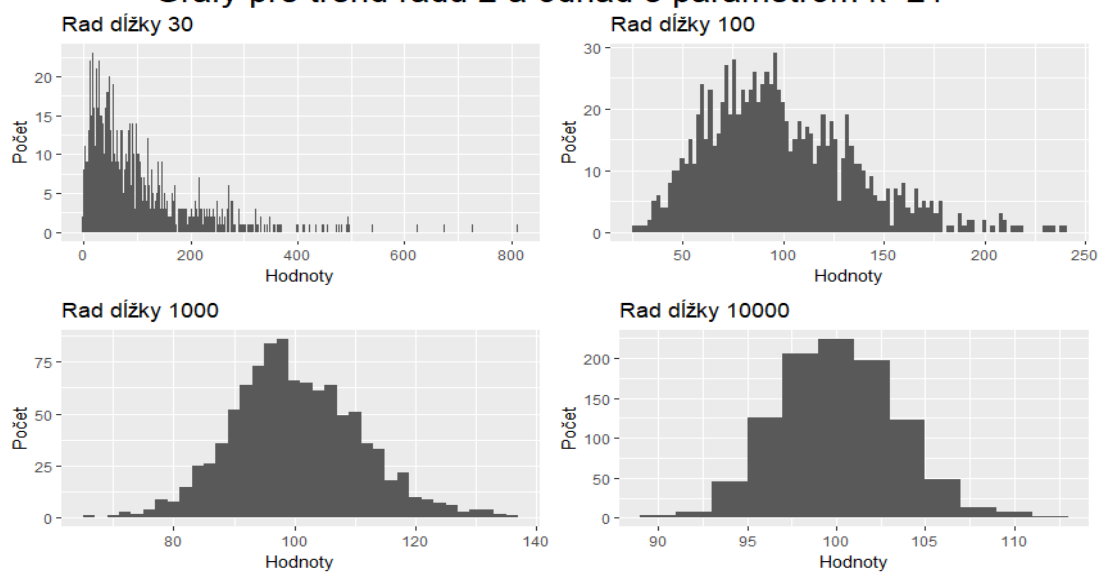
Obr. 1.2: Histogramy nameraných hodnôt pre lineárny trend a $k=11$

Grafy pre trend rádu 2 a odhad s parametrom $k=3$



Obr. 1.3: Histogramy nameraných hodnôt pre kvadratický trend a $k=3$

Grafy pre trend rádu 2 a odhad s parametrom $k=21$



Obr. 1.4: Histogramy nameraných hodnôt pre kvadratický trend a $k=21$

Na obrázkoch môžeme pozorovať, že s narastajúcou dĺžkou pozorovanej trajektórie časového radu sa namerané hodnoty výraznejšie zhlukujú okolo skutočnej hodnoty rozptylu reziduálnej zložky. Taktiež je viditeľné pre oba trendy, že rozptyl nášho odhadu je menší, ak volíme $k = r + 1$, kde r je rád trendového polynómu ako keď volíme $k = 10r + 1$. Toto pozorovanie súvisí s javom nazvaným *preferencovanie*. Vyššie spomenuté kritérium na určenie rádu trendového polynómu využíva túto vlastnosť nášho odhadu rozptylu.

2. Softwarový prístup

2.1 Stručný popis implementácie

Praktická časť práce využíva výpočtový software Matlab a R.

V Matlabe sú napočítavané všetky váhy kľzavých priemerov ako aj váhy na určenie ostatných koeficientov aproximačného polynómu, ktorý využívame na vyhladenie okrajov rady a extrapoláciu.

Hlavná myšlienka tohoto výpočtu je, že riešime sústavu

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{A}^T \mathbf{y},$$

kde matica \mathbf{A} je rovnako definovaná ako 1.1. Pričom riešením takejto sústavy, je matica \mathbf{X} takú, že $\mathbf{X} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T$. Táto matica je za predpokladu plnej stĺpcovej hodnoty matice \mathbf{A} dobre definovaná ($\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ regulárna). Na riešenie tejto sústavy v Matlabe využijeme funkciu `\`.

Výhoda takéhoto výpočtu je v tom, že pre ľubovoľný m -rozmerný vektor \mathbf{y}

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{b} = \mathbf{A}^T \mathbf{y},$$

platí, že pre vektor koeficientov aproximačného polynóma \mathbf{b} platí

$$\mathbf{b} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{y} = \mathbf{X} \mathbf{y},$$

a takto vieme charakterizovať pre daný rád a dĺžku každý aproximačný polynóm. Pričom prvý riadkový vektor tejto matice sú práve váhy hľadaného kľzavého priemeru a ostatné riadkové vektory sú zasa váhy pre určenie ostatných koeficientov aproximačného polynómu (konkrétne $b_i = \mathbf{X}_{-,i+1} \cdot \mathbf{y}$).

Z tohoto dôvodu použijeme ako výstup pre každú vhodnú kombináciu rádu a dĺžky kľzavého priemeru takto vypočítanú maticu \mathbf{X} exportovanú vo formáte csv, ktorá daný priemer jednoznačne určuje.

Keďže tento postup vedie na riešenie sústavy lineárnych rovníc s Vandermondovou maticou, ktorá má vysokú podmienenosť, je možné tento prístup aplikovať skôr na výpočet váh kľzavých priemerov nižších rádov a nižšej dĺžky. Dôvodom je numerická nestabilita takejto sústavy. Preto v prílohe uvádzame váhy pre priemery dĺžky maximálne 31 a rádu maximálne 10.

2.2 Popis priložených materiálov

2.2.1 Popis tabuliek

V tabuľkách v A.1 máme váhy pre vyrovnávanie prvých m členov časového radu, sú uvedené pre rôzne dĺžky (maximálna dĺžka 11) a rády (maximálny rád 6) kľzavých priemerov. Ak tieto váhy prepíšeme v opačnom poradí, dostaneme váhy pre posledných m členov časového radu. Je to jedna z vlastností kľzavých priemerov konštruovaných v kapitole 2.

V tabuľkách v A.2 máme váhy pre vyrovnávanie prostrednej časti trajektorie časového radu, teda členy $m + 1$ až $T - m$. Sú uvedené pre rôzne dĺžky (maximálna

dĺžka 31) a rády (maximálny r d 10) kĺzavých priemerov. Pre ka d y vektor váh je v ždy uvedených prvých $m + 1$ v h, pretože tieto vektory sú symetrick e. Toto je taktiež jedna z vlastnosc  taktó konštruovaných kĺzavých priemerov.

V tabuľkách v A.3 máme váhy pre predpovedanie budúceho správania časovej rady o jeden krok dopredu. Sú uvedenie pre rôzne dĺžky (maximálna dĺžka 11) a rády (maximálny r d 6) kĺzavých priemerov.

2.2.2 Aplikácia na vyrov n vanie časových radov

Práca zah r a prilo en  aplikáciu, ktor u možno použiť na vyrov n vanie časových radov. Jej zdrojov  kód a potrebn  dáta sú na priloženom CD. Avšak aplikáciu možno nájsť aj na cloud-e, link:

<https://auhliarik.shinyapps.io/shiny/>

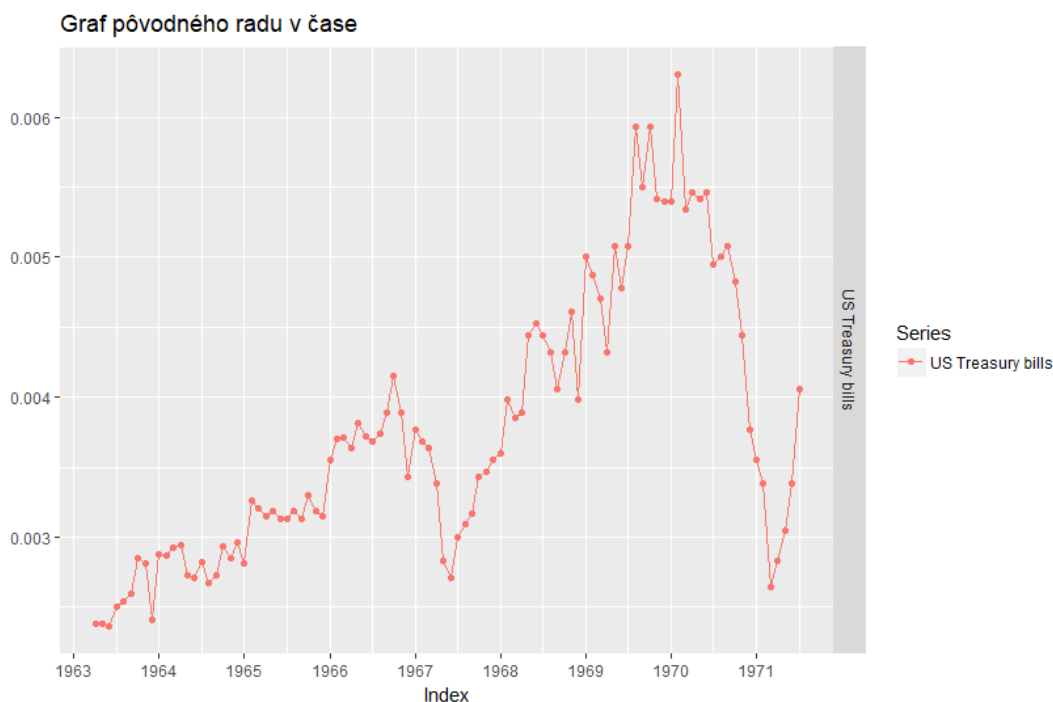
Aplikácia berie ako vstup trajektoriu časového radu zadan u ako postupnosť re  lnych  isiel. Vstup môže byť zadan y z klávesnice, vo formáte re  lnych  isiel s desatinnou bodkou, oddelených čiarkou. Napríklad 1,0.5,10,-0.2,21.3193. Ďalšia možnosť je vstup vo formáte .csv, v ktorom je ulo en  len trajektória časového radu (hodnoty oddelen e čiarkou a súbor je bez hlavičky), teda podobným spôsobom ako pri vstupe z klávesnice. Aplikácia umo  ňuje u  ivateľovi si zvol i  r d a dĺžku kĺzavého priemeru, akým chceme dan y rad vyrov n va . Na výstupe dostaneme graf nášho pôvodného časového radu a vyrovnaného radu.

Na vytvorenie vhodného .csv súboru pre našu aplikáciu m  žeme použiť napríklad software R. Ako príklad slúži napríklad

```
write.table(t(c(1,1,1,5,6,3,2,1,1,1,2,5,6,3,5,4,7,8,9,6,3,4,5,8,6,
3,2,6,4,1,0,5,6,-10,-6,-8,-4,-2,3,-1)), file = "time_series.csv",
col.names = FALSE, row.names = FALSE, sep = ",").
```


3. Ukážka na reálnych dátach

V tejto kapitole uvedieme ukážku využitia, napočítaných váh kľzavých priemerov, na vyhladzovanie reálnych dát. Použijeme súbor mesačných návratností amerických Treasury Bills, cenných papierov vydávaných americkou vládou, podobných štátnym dlhopisom, ale s kratšou dobou kontraktu.



Obr. 3.1: Vývoj návratnosti US Treasury Bills (1963-1971)

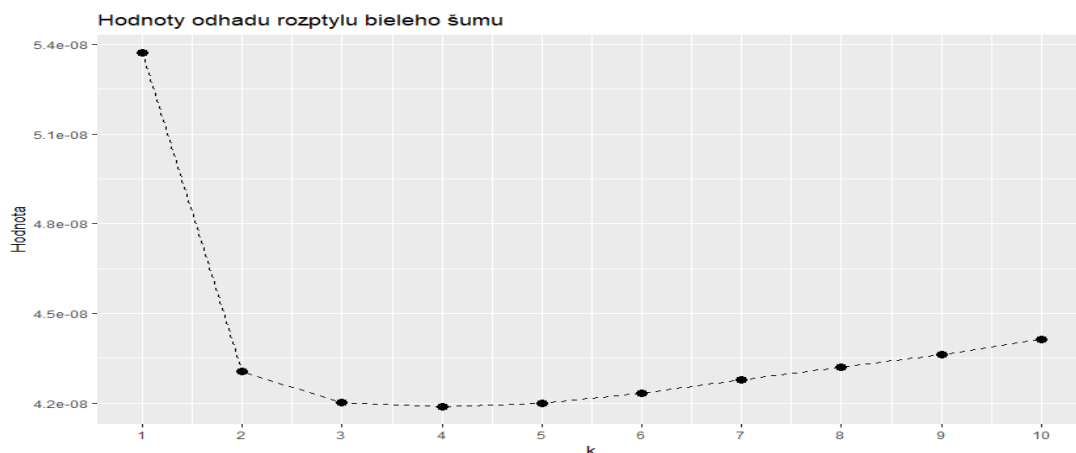
Z ukážky je fluktuácia dát viditeľná, teda pri analyzovaní dlhodobého trendu je vhodné tento rad očistiť o krátkodobé, respektíve sezónne výkyvy. Na vhodné vyhladenie potrebujeme určiť parametre (rád a dĺžku) kľzavého priemeru, ktorý využijeme.

3.1 Určenie vhodného rádu kľzavého priemeru

Na určenie rádu kľzavého priemeru využijeme metódu popísanú v druhej kapitole. Teda vypočítame si pre rôzne hodnoty k hodnoty odhadu rozptylu bieleho šumu

$$V_k = \frac{\sum_{t=k+1}^n (\Delta^k y_t)^2}{\binom{2k}{k}(n-k)}.$$

Z grafickej ukážky možno badať, že horná hranica rádu vhodných kľzavých priemerov je 2 (pri čísle $k = 3$ je už hodnota V_k ustálená).

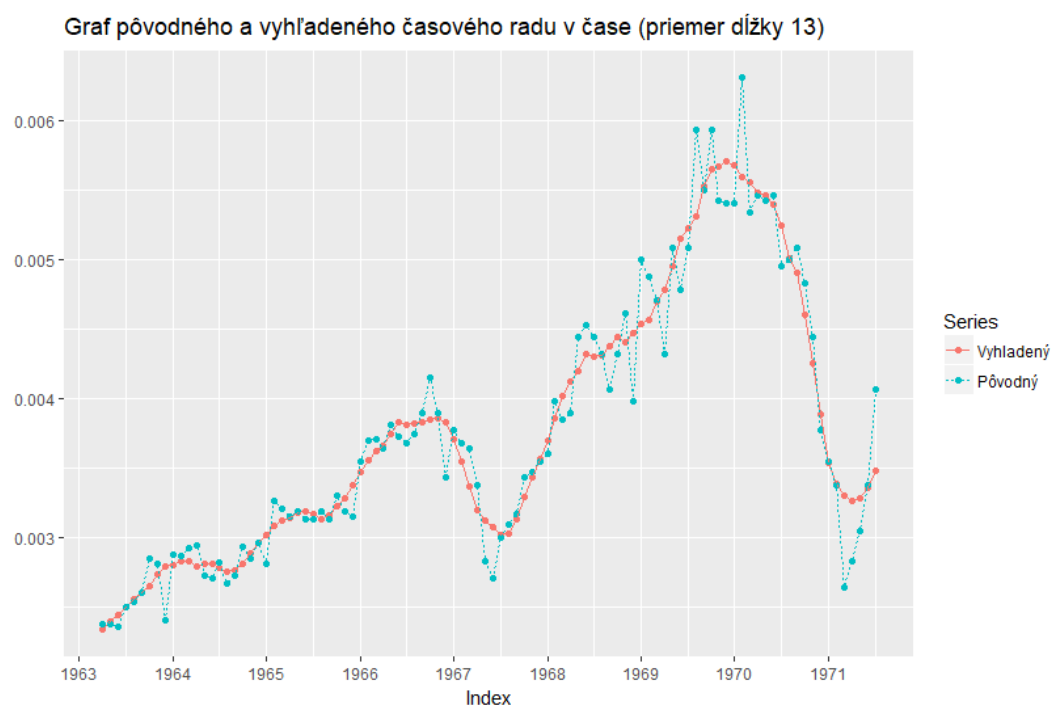


Obr. 3.2: Hodnoty odhadu rozptylu

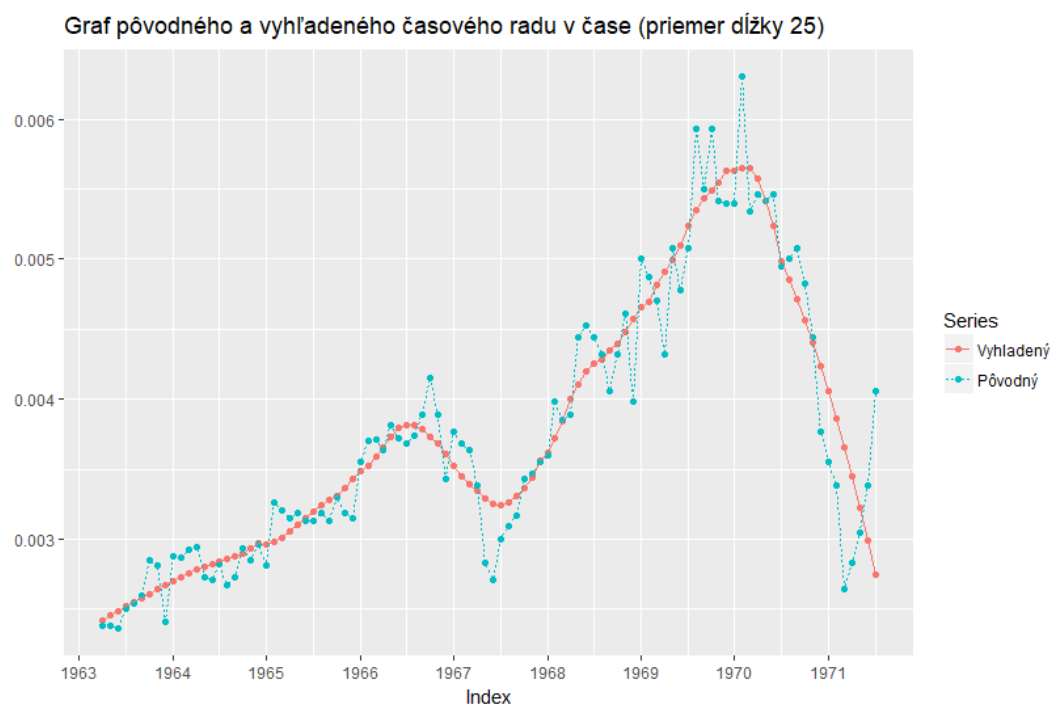
3.2 Určenie dĺžky klzavého priemeru

Táto otázka je viac expertného charakteru ako matematického. Dĺžka vyrovnávaného priemeru sa určuje podľa charakteru dát, ktoré analyzujeme. Ako bolo ale spomenuté v kapitole 2, platí pravidlo, že dĺžka priemeru by mala byť väčšia ako je perióda cyklickej a sezónnej zložky a navyše, čím väčší úsek vyhladzujeme, tým väčšie vyhladenie dosiahneme.

Povedzme teda, že nás zaujíma medziročný vývoj týchto dát. Môžeme predpokladať, že výška návratností Treasury bills má periódu sezónnej a cyklickej zložky aspoň jeden rok, preto prvá možnosť pre dĺžku klzavého priemeru bude 13 (rok má síce 12 mesiacov, ale potrebujeme nepárne číslo), taktiež môžeme vyskúšať klzavý priemer dĺžky 25, či s ním nedosiahneme lepšie vyhladenie. Na druhú stranu, ale dlhší klzavý priemer je menej citlivý na indikáciu zmeny trendu. To si môžeme všimnúť na rozdielnom vyrovnaní koncových častí nášho časového radu. Zatiaľ čo prvý priemer indikuje prechod k rastúcemu trendu, druhý priemer túto zmenu ignoruje, lebo nárast hodnôt nie je dostatočne dlhodobý, resp. nie je dostatočne prudký. Všeobecne sa dá povedať, že dlhšie klzavé priemery sú menej citlivé na krátkodobé zmeny trendu a na dlhodobější zmeny reagujú menej dynamicky ako krátke klzavé priemery. Tento fakt vysvetľuje nekonzistentnosť záverov, ktoré môžeme vyvodzovať z nižšie uvedených obrázkov.



Obr. 3.3: Rad návratnosti US Treasury bills vyrovnaný priemerom dĺžky 13



Obr. 3.4: Rad návratnosti US Treasury bills vyrovnaný priemerom dĺžky 25

Záver

Táto bakalárska práca sa zaoberala analýzou časových radov využitím kĺzavých priemerov. Najskôr sme poukázali na teoretický aspekt tejto metódy, kde sme nadväzovali na monografiu Cipra (2014). Uviedli sme základné pojmy a tvrdenia, ktoré sú využívané v metodách založených na aproximácii trendovej zložky časových radov polynómami. Následne sme odvodili spôsob ako napočítavať váhy takto konštruovaných kĺzavých priemerov a uviedli sme možný spôsob nájdenia vhodného kĺzavého priemeru pre konkrétny časový rad.

Vo zvyšku práce sme sa venovali praktickému uchopeniu tejto metódy. Napočítali sme váhy kĺzavých priemerov rôznych dĺžok a rôznych rádov, ktoré sú uvedené v prílohe. Popísali sme výpočtový aspekt problému napočítavania váh a navrhli možné vylepšenie nami využívaného spôsobu výpočtu. Na záver sme demonštrovali spôsoby vybratia vhodného kĺzavého priemeru pri vyrovnávaní konkrétneho časového radu a graficky sme porovnali nevyrovnaný časový rad s vyrovnanými časovými radmi. Daná metodika sa dá doporučiť ako účinný nástroj pre vyrovnávanie a predpovedanie v rutinných časových radách predovšetkým ekonomického charakteru.

Zoznam použitej literatúry

CHATFIELD, C. (1975). *The Analysis of Time Series: Theory and Practice*. First edition. Springer, Boston. ISBN 978-0-412-14180-5.

CIPRA, T. (2014). *Finanční ekonometrie*. Druhé vydání. Ekopress, Praha. ISBN 978-80-86929-93-4.

DUPAČ, V. a HUŠKOVÁ, M. (2013). *Pravděpodobnost a matematická statistika*. Druhé vydání. Karolinum, Praha. ISBN 978-80-24622-08-8.

KENDALL, M. (1976). *Time Series*. Second edition. Griffin, London. ISBN 978-08-52642-41-2.

MONTGOMERY, D. C., JOHNSON, L. A. a GARDINER, J. S. (1990). *Forecasting and Time Series Analysis*. McGraw-Hill, New York. ISBN 978-00-70428-58-4.

A. Prílohy

A.1 Prvá príloha

Váhy pre prvých m členov vyrovnannej rady s využitím polynómu stupňa 2		
Počet bodov ($2m + 1$)	Váhy a poradie v č. rade	
3	1	(1, 0, 0)
5	1	$10^{-6} \cdot (885710, 257140, -85714, -142860, 85714)$
	2	$10^{-5} \cdot (25714, 37143, 34286, 17143, -14286)$
7	1	$10^{-6} \cdot (761900, 357140, 71429, -95238, -142860, -71429, 119050)$
	2	$10^{-6} \cdot (357140, 285710, 214290, 142860, 71429, 0, -71429)$
	3	$10^{-6} \cdot (71429, 214290, 285710, 285710, 214290, 71429, -142860)$
9	1	$10^{-7} \cdot (6606100, 3818200, 1636400, 60606, -909090, -1272700, -1030300, -181820, 1272700)$
	2	$10^{-7} \cdot (3818200, 2787900, 1909100, 1181800, 606060, 181820, -90909, -212120, -181820)$
	3	$10^{-7} \cdot (1636400, 1909100, 2008700, 1935100, 1688300, 1268400, 675320, -90909, -1030300)$
	4	$10^{-7} \cdot (60606, 1181800, 1935100, 2320300, 2337700, 1987000, 1268400, 181820, -1272700)$
11	1	$10^{-6} \cdot (580420, 377620, 209790, 76923, -20979, -83916, -111890, -104900, -62937, 13986, 125870)$
	2	$10^{-7} \cdot (3776200, 2783200, 1930100, 1216800, 643360, 209790, -83916, -237760, -251750, -125870, 139860)$
	3	$10^{-6} \cdot (209790, 193010, 173890, 152450, 128670, 102560, 74126, 43357, 10256, -25175, -62937)$
	4	$10^{-6} \cdot (76923, 121680, 152450, 169230, 172030, 160840, 135660, 96503, 43357, -23776, -104900)$
	5	$10^{-7} \cdot (-209790, 643360, 1286700, 1720300, 1944100, 1958000, 1762200, 1356600, 741260, -83916, -1118900)$

Tabulka A.1: Stupeň 2

Váhy pre prvých m členov vyrovnanej rady s využitím polynómu stupňa 3		
Počet bodov ($2m + 1$)	Váhy a poradie v č. rade	
3	1	(1, 0, 0)
5	1	$10^{-6} \cdot (985710, 57143, -85714, 57143, -14286)$
	2	$10^{-6} \cdot (57143, 771430, 342860, -228570, 57143)$
7	1	$10^{-6} \cdot (928570, 190480, -95238, -95238, 23810, 95238, -47619)$
	2	$10^{-6} \cdot (190480, 452380, 380950, 142860, -95238, -166670, 95238)$
	3	$10^{-6} \cdot (-95238, 380950, 452380, 285710, 47619, -95238, 23810)$
9	1	$10^{-6} \cdot (858590, 282830, -20202, -121210, -90909, 0, 80808, 80808, -70707)$
	2	$10^{-6} \cdot (282830, 328280, 282830, 181820, 60606, -45455, -101010, -70707, 80808)$
	3	$10^{-6} \cdot (-20202, 282830, 371570, 311690, 168830, 8658, -103170, -101010, 80808)$
	4	$10^{-6} \cdot (-121210, 181820, 311690, 313850, 233770, 116880, 8658, -45455, 0)$
11	1	$10^{-6} \cdot (790210, 335660, 55944, -83916, -118880, -83916, -13986, 55944, 90909, 55944, -83916)$
	2	$10^{-6} \cdot (335660, 286710, 223780, 153850, 83916, 20979, -27972, -55944, -55944, -20979, 55944)$
	3	$10^{-6} \cdot (55944, 223780, 286710, 270400, 200470, 102560, 2331, -74592, -102560, -55944, 90909)$
	4	$10^{-6} \cdot (-83916, 153850, 270400, 292540, 247090, 160840, 60606, -26807, -74592, -55944, 55944)$
	5	$10^{-6} \cdot (-118880, 83916, 200470, 247090, 240090, 195800, 130540, 60606, 2331, -27972, -13986)$

Tabulka A.2: Stupeň 3

Váhy pre prvých m členov vyrovnanej rady s využitím polynómu stupňa 4		
Počet bodov ($2m + 1$)	Váhy a poradie v č. rade	
5	1	(1, 0, 0, 0, 0)
	2	(0, 1, 0, 0, 0)
7	1	$10^{-6} \cdot (987010, 54113, -75758, 21645, 43290, -41126, 10823)$
	2	$10^{-6} \cdot (54113, 770560, 335500, -129870, -140690, 151520, -41126)$
	3	$10^{-6} \cdot (-75758, 335500, 458870, 324680, 54113, -140690, 43290)$
9	1	$10^{-6} \cdot (956490, 135980, -97125, -58275, 34965, 62937, 3885, -66045, 27195)$
	2	$10^{-6} \cdot (135980, 548560, 398210, 87413, -128210, -139860, 14375, 149570, -66045)$
	3	$10^{-6} \cdot (-97125, 398210, 432010, 262240, 69930, -40793, -42735, 14375, 3885)$
	4	$10^{-6} \cdot (-58275, 87413, 262240, 354310, 314690, 157340, -40793, -139860, 62937)$
11	1	$10^{-6} \cdot (916080, 209790, -69930, -104900, -34965, 41958, 69930, 34965, -34965, -69930, 41958)$
	2	$10^{-6} \cdot (209790, 412590, 349650, 174830, 0, -104900, -111890, -34965, 69930, 104900, -69930)$
	3	$10^{-6} \cdot (-69930, 349650, 412590, 291380, 116550, -23310, -81585, -53613, 23310, 69930, -34965)$
	4	$10^{-6} \cdot (-104900, 174830, 291380, 296040, 233100, 139860, 46620, -23310, -53613, -34965, 34965)$
	5	$10^{-6} \cdot (-34965, 0, 116550, 233100, 296040, 279720, 186480, 46620, -81585, -111890, 69930)$

Tabulka A.3: Stupeň 4

Váhy pre prvých m členov vyrovnanej rady s využitím polynómu stupňa 5		
Počet bodov ($2m + 1$)	Váhy a poradie v č. rade	
5	1	(1, 0, 0, 0, 0)
	2	(0, 1, 0, 0, 0)
7	1	$10^{-7} \cdot (9989200, 64935, -162340, 216450, -162340, 64935, -10823)$
	2	$10^{-7} \cdot (64935, 9610400, 974030, -1298700, 974030, -389610, 64935)$
	3	$10^{-6} \cdot (-16234, 97403, 756490, 324680, -243510, 97403, -16234)$
9	1	$10^{-6} \cdot (990680, 41958, -62937, 18648, 34965, -13986, -30303, 27972, -6993)$
	2	$10^{-6} \cdot (41958, 807110, 304200, -124130, -128210, 71678, 108390, -108970, 27972)$
	3	$10^{-6} \cdot (-62937, 304200, 466200, 339160, 69930, -117720, -76923, 108390, -30303)$
	4	$10^{-6} \cdot (18648, -124130, 339160, 527390, 314690, -15734, -117720, 71678, -13986)$
11	1	$10^{-6} \cdot (973780, 94406, -89161, -27972, 41958, 41958, -6993, -41958, -15734, 45455, -15734)$
	2	$10^{-6} \cdot (94406, 643360, 388110, 20979, -153850, -104900, 41958, 118880, 31469, -125870, 45455)$
	3	$10^{-6} \cdot (-89161, 388110, 419000, 265730, 90909, -23310, -55944, -27972, 16900, 31469, -15734)$
	4	$10^{-6} \cdot (-27972, 20979, 265730, 398600, 335660, 139860, -55944, -125870, -27972, 118880, -41958)$
	5	$10^{-6} \cdot (41958, -153850, 90909, 335660, 398600, 279720, 83916, -55944, -55944, 41958, -6993)$

Tabulka A.4: Stupeň 5

Váhy pre prvých m členov vyrovnanej rady s využitím polynómu stupňa 6		
Počet bodov ($2m + 1$)	Váhy a poradie v č. rade	
7	1	(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)
	2	(0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)
	3	(0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)
9	1	$10^{-7} \cdot (9987600, 76146, -184930, 206680, -54390, -119660, 141410, -63714, 10878)$
	2	$10^{-7} \cdot (76146, 9530700, 1153100, -1327100, 435120, 630920, -804970, 369850, -63714)$
	3	$10^{-6} \cdot (-18493, 115310, 710640, 350270, -152290, -106600, 167520, -80497, 14141)$
	4	$10^{-6} \cdot (20668, -132710, 350270, 527890, 304580, -15229, -106600, 63092, -11966)$
11	1	$10^{-7} \cdot (9938300, 302340, -503910, 201560, 259150, -115180, -230360, 61703, 230360, -187170, 43192)$
	2	$10^{-6} \cdot (30234, 848700, 264050, -133030, -102510, 66228, 93295, -35130, -92596, 79473, -18717)$
	3	$10^{-6} \cdot (-50391, 264050, 493950, 358780, 59893, -126700, -86960, 65076, 91855, -92596, 23036)$
	4	$10^{-7} \cdot (201560, -1330300, 3587800, 5141100, 2971600, 115180, -944470, -103660, 650760, -351300, 61703)$
	5	$10^{-6} \cdot (25915, -102510, 59893, 297160, 411440, 322500, 96750, -94447, -86960, 93295, -23036)$

Tabulka A.5: Stupeň 6

A.2 Druhá príloha

Váhy kľazavého priemeru pri využití polynómu stupňa 2 alebo 3	
Počet bodov	Váhy
3	(0, 1 , ...)
5	$10^{-6} \cdot (-85714, 342860, \mathbf{485710}, \dots)$
7	$10^{-6} \cdot (-95238, 142860, 285710, \mathbf{333330}, \dots)$
9	$10^{-6} \cdot (-90909, 60606, 168830, 233770, \mathbf{255410}, \dots)$
11	$10^{-6} \cdot (-83916, 20979, 102560, 160840, 195800, \mathbf{207460}, \dots)$
13	$10^{-6} \cdot (-76923, 0, 62937, 111890, 146850, 167830, \mathbf{174830}, \dots)$
15	$10^{-6} \cdot (-70588, -11765, 38009, 78733, 110410, 133030, 146610, \mathbf{151130}, \dots)$
17	$10^{-6} \cdot (-65015, -18576, 21672, 55728, 83591, 105260, 120740, 130030, \mathbf{133130}, \dots)$
19	$10^{-6} \cdot (-60150, -22556, 10615, 39363, 63689, 83591, 99071, 110130, 116760, \mathbf{118970}, \dots)$
21	$10^{-7} \cdot (-559010, -248450, 29421, 274600, 487090, 666880, 813990, 928410, 1010100, 1059200, \mathbf{1075500}, \dots)$
23	$10^{-7} \cdot (-521740, -260870, -24845, 186340, 372670, 534160, 670810, 782610, 869570, 931680, 968940, \mathbf{981370}, \dots)$
25	$10^{-7} \cdot (-488890, -266670, -63768, 119810, 284060, 428990, 554590, 660870, 747830, 815460, 863770, 892750, \mathbf{902420}, \dots)$
27	$10^{-7} \cdot (-459770, -268200, -91954, 68966, 214560, 344830, 459770, 559390, 643680, 712640, 766280, 804600, 827590, \mathbf{835250}, \dots)$
29	$10^{-7} \cdot (-433820, -266960, -112470, 29663, 159440, 276850, 381910, 474600, 554940, 622910, 678530, 721790, 752690, 771230, \mathbf{777410}, \dots)$
31	$10^{-8} \cdot (-4105600, -2639300, -1274100, -10112, 1152800, 2214600, 3175200, 4034800, 4793200, 5450500, 6006700, 6461700, 6815700, 7068500, 7220100, \mathbf{7270700}, \dots)$

Tabulka A.6: Stupeň 2 a 3

Váhy kľzavého priemeru pri využití polynómu stupňa 4 alebo 5	
Počet bodov	Váhy
5	(0, 0, 1 , ...)
7	$10^{-6} \cdot (21645, -129870, 324680, \mathbf{567100}, \dots)$
9	$10^{-6} \cdot (34965, -128210, 69930, 314690, \mathbf{417250}, \dots)$
11	$10^{-6} \cdot (41958, -104900, -23310, 139860, 279720, \mathbf{333330}, \dots)$
13	$10^{-6} \cdot (45249, -81448, -55533, 45249, 160430, 246810, \mathbf{278490}, \dots)$
15	$10^{-7} \cdot (464400, -619200, -635870, -35723, 812960, 1623800, 2192100, \mathbf{2395200}, \dots)$
17	$10^{-6} \cdot (46440, -46440, -61920, -27864, 32151, 98833, 157180, 196480, \mathbf{210290}, \dots)$
19	$10^{-7} \cdot (457670, -343250, -565350, -390360, 24229, 545160, 1063400, 1494100, 1776800, \mathbf{1875100}, \dots)$
21	$10^{-6} \cdot (44720, -24845, -50016, -43151, -15153, 24529, 67900, 108420, 140990, 161990, \mathbf{169230}, \dots)$
23	$10^{-7} \cdot (434780, -173910, -434780, -434780, -251720, 45767, 398170, 755150, 1075500, 1327200, 1487400, \mathbf{1542300}, \dots)$
25	$10^{-7} \cdot (421460, -114940, -373810, -418120, -304850, -84958, 196570, 500750, 794600, 1051100, 1249400, 1374300, \mathbf{1417000}, \dots)$
27	$10^{-7} \cdot (407860, -67977, -318870, -391550, -328650, -168790, 53522, 307800, 567650, 810720, 1018700, 1177500, 1276800, \mathbf{1310600}, \dots)$
29	$10^{-7} \cdot (394380, -30337, -270220, -360670, -334240, -220670, -46853, 163140, 388090, 609570, 812010, 982690, 1111700, 1191900, \mathbf{1219100}, \dots)$
31	$10^{-7} \cdot (381230, 0, -227530, -328650, -328650, -250780, -116290, 55617, 247750, 444940, 634040, 803920, 945490, 1051700, 1117400, \mathbf{1139700}, \dots)$

Tabulka A.7: Stupeň 4 a 5

Váhy kľzavého priemeru pri využití polynómu stupňa 6 alebo 7	
Počet bodov	Váhy
7	(0, 0, 0, 1 , ...)
9	$10^{-6} \cdot (-5439, 43512, -152290, 304580, \mathbf{619270}, \dots)$
11	$10^{-6} \cdot (-11518, 66228, -126700, 11518, 322500, \mathbf{475940}, \dots)$
13	$10^{-6} \cdot (-16671, 73351, -78049, -75776, 98508, 303100, \mathbf{391070}, \dots)$
15	$10^{-6} \cdot (-20640, 72239, -37787, -86132, -11114, 138920, 277840, \mathbf{333330}, \dots)$
17	$10^{-7} \cdot (-235560, 673040, -94225, -716110, -539980, 362410, 1558300, 2536800, \mathbf{2910500}, \dots)$
19	$10^{-6} \cdot (-25629, 60870, 9261, -51635, -64073, -18280, 67088, 160940, 232170, \mathbf{258580}, \dots)$
21	$10^{-6} \cdot (-27053, 54106, 21002, -32952, -59550, -42967, 11370, 86185, 160060, 213410, \mathbf{232780}, \dots)$
23	$10^{-6} \cdot (-27986, 47576, 27986, -17491, -49449, -50817, -20223, 33759, 97474, 156180, 197120, \mathbf{211760}, \dots)$
25	$10^{-9} \cdot (-28550000, 41528000, 31778000, -5416600, -38029000, -49782000, -36016000, -57017, 49944000, 103680000, 150860000, 182930000, \mathbf{194270000}, \dots)$
27	$10^{-7} \cdot (-288390, 360480, 334530, 36913, -271840, -444490, -420580, -202620, 164810, 613260, 1065800, 1449500, 1705200, \mathbf{1794900}, \dots)$
29	$10^{-7} \cdot (-289210, 311460, 337410, 103820, -176490, -373750, -423630, -311330, -57326, 295210, 691300, 1073400, 1388900, 1596100, \mathbf{1668200}, \dots)$
31	$10^{-7} \cdot (-288500, 267890, 331350, 151710, -96167, -299340, -394820, -358610, -195820, 68184, 395630, 743100, 1067200, 1329400, 1499500, \mathbf{1558400}, \dots)$

Tabulka A.8: Stupeň 6 a 7

Váhy kľzavého priemeru pri využití polynómu stupňa 8 alebo 9	
Počet bodov	Váhy
9	(0, 0, 0, 0, 1 , ...)
11	$10^{-6} \cdot (1364, -13640, 61378, -163680, 286430, \mathbf{656280}, \dots)$
13	$10^{-7} \cdot (35723, -278640, 857350, -1107400, -321510, 3215100, \mathbf{5198900}, \dots)$
15	$10^{-7} \cdot (60573, -383630, 839640, -400720, -1023500, 582440, 3145200, \mathbf{4360100}, \dots)$
17	$10^{-7} \cdot (84803, -448240, 706690, 84803, -848030, -537080, 1102400, 2968100, \mathbf{3773100}, \dots)$
19	$10^{-7} \cdot (106790, -480550, 541120, 348630, -480550, -791490, -65958, 1385100, 2770200, \mathbf{3333300}, \dots)$
21	$10^{-6} \cdot (12594, -48976, 38113, 45924, -15141, -67823, -55171, 30250, 152840, 257920, \mathbf{298940}, \dots)$
23	$10^{-7} \cdot (142190, -483440, 241490, 477340, 85068, -453640, -649460, -279090, 569920, 1590000, 2403500, \mathbf{2712100}, \dots)$
25	$10^{-7} \cdot (155730, -467190, 125940, 444620, 233590, -229240, -564120, -515510, -31003, 756910, 1603600, 2245100, \mathbf{2483200}, \dots)$
27	$10^{-7} \cdot (166850, -444940, 33370, 387100, 314040, -44978, -412050, -550370, -346370, 175940, 884050, 1589000, 2103000, \mathbf{2290800}, \dots)$
29	$10^{-7} \cdot (175870, -419380, -39082, 320180, 346510, 90992, -252020, -482640, -469550, -176980, 341230, 967820, 1557900, 1975900, \mathbf{2126600}, \dots)$
31	$10^{-7} \cdot (183090, -392330, -94700, 252530, 347230, 183090, -110130, -372490, -476870, -358940, -22783, 469930, 1020500, 1517700, 1861900, \mathbf{1984700}, \dots)$

Tabulka A.9: Stupeň 8 a 9

Váhy klízavého priemeru pri využití polynómu stupňa 10 alebo 11	
Počet bodov	Váhy
11	(0, 0, 0, 0, 0, 1 , ...)
13	$10^{-7} \cdot (-3417, 41004, -225520, 751730, -1691400, 2706200, $ 6842700 , ...)
15	$10^{-7} \cdot (-10661, 104830, -437100, 948820, -899070, $ $-644990, 3166300, $ 5543700 , ...)
17	$10^{-7} \cdot (-20730, 171760, -559700, 787720, -41459, $ $-1119400, 228030, 3192400, $ 4722800 , ...)
19	$10^{-7} \cdot (-32405, 230880, -598810, 509660, 426030, -670490, $ $-820610, 805590, 3082300, $ 4135700 , ...)
21	$10^{-7} \cdot (-44687, 278050, -579760, 239230, 572820, -147210, $ $-841450, -415790, 1166000, 2928600, $ 3688300 , ...)
23	$10^{-7} \cdot (-56875, 312810, -526320, 22344, 535580, 210890, $ $-512730, -757330, -43903, 1383000, 2765900, $ 3333300 , ...)
25	$10^{-7} \cdot (-68521, 336370, -455810, -133070, 415590, 390690, $ $-158210, -657610, -565880, 259660, 1507100, 2607900, $ 3043600 , ...)
27	$10^{-7} \cdot (-79367, 350540, -379520, -234130, 272530, 439890, $ $109040, -406100, -653570, -346280, 494840, 1571500, $ $2459700, $ 2801900 , ...)
29	$10^{-7} \cdot (-89288, 357150, -304240, -292220, 136910, 409180, $ $271490, -149070, -528510, -566270, -135610, 671860, $ $1597100, 2323100, $ 2596900 , ...)
31	$10^{-7} \cdot (-98241, 357880, -233750, -318440, 21866, 337070, $ $346370, 55218, -331150, -556230, -440130, 51197, 802420, $ $1597700, 2197900, $ 2420700 , ...)

Tabulka A.10: Stupeň 10 a 11

A.3 Tretia príloha

Predpovedné váhy o jeden krok dopredu s využitím polynómu stupňa 2	
Počet bodov ($2m + 1$)	Váhy
3	(1, -3, 3)
5	$10^{-1} \cdot (6, -6, -8, 0, 18)$
7	$10^{-5} \cdot (42857, -14286, -42857, -42857, -14286, 42857, 128570)$
9	$10^{-5} \cdot (33333, 0, -21429, -30952, -28571, -14286, 11905, 50000, 100000)$
11	$10^{-6} \cdot (272730, 54545, -103030, -200000, -236360, -212120, -127270, 18182, 224240, 490910, 818180)$

Tabulka A.11: Stupeň 2

Predpovedné váhy o jeden krok dopredu s využitím polynómu stupňa 3	
Počet bodov ($2m + 1$)	Váhy
3	(-2, -3, 6)
5	$10^{-1} \cdot (-8, 22, -8, -28, 32)$
7	$10^{-5} \cdot (-57143, 85714, 57143, -42857, -114290, -57143, 228570)$
9	$10^{-5} \cdot (-44444, 38889, 50794, 19048, -28571, -64286, -60317, 11111, 177780)$
11	$10^{-6} \cdot (-363640, 181820, 363640, 287880, 60606, -212120, -424240, -469700, -242420, 363640, 1454500)$

Tabulka A.12: Stupeň 3

Predpovedné váhy o jeden krok dopredu s využitím polynómu stupňa 4	
Počet bodov ($2m + 1$)	Váhy
5	(1, -5, 10, -10, 5)
7	$10^{-5} \cdot (71429, -214290, 100000, 214290, -71429, -357140, 357140)$
9	$10^{-5} \cdot (55556, -111110, -27778, 83333, 100000, 0, -138890, -138890, 277780)$
11	$10^{-5} \cdot (45455, -63636, -45455, 15152, 60606, 60606, 12121, -60606, -106060, -45455, 227270)$

Tabulka A.13: Stupeň 4

Predpovedné váhy o jeden krok dopredu s využitím polynómu stupňa 5	
Počet bodov ($2m + 1$)	Váhy
5	$10^{-3} \cdot (-875, 4000, 10000, -19000, 6875)$
7	$10^{-5} \cdot (-85714, 414290, -685710, 214290, 714290, -985710, 514290)$
9	$10^{-5} \cdot (-66667, 225000, -150000, -191670, 100000, 275000, -16667, -475000, 400000)$
11	$10^{-5} \cdot (-54545, 136360, -12121, -118180, -72727, 60606, 145450, 72727, -139390, -245450, 327270)$

Tabulka A.14: Stupeň 5

Predpovedné váhy o jeden krok dopredu s využitím polynómu stupňa 6	
Počet bodov ($2m + 1$)	Váhy
7	$(1, -7, 21, -35, 35, -21, 7)$
9	$10^{-5} \cdot (77778, -388890, 644440, -155560, -622220, 311110, 777780, -1088900, 544440)$
11	$10^{-5} \cdot (63636, -241820, 216360, 165450, -167270, -254550, 50909, 356360, 89091, -623640, 445450)$

Tabulka A.15: Stupeň 6